

2013 m. balandžio 22 d. paruoštas pradinis variantas

2013 m. balandžio 29 d. pradiniam variantui iš esmės
pritarta Bendrojo ugdymo taryboje

2013 m. birželio 14 d. paruoštas papildytas variantas
ir gairių įgyvendinimo plano projektas

Matematinio ugdymo bendrojo ugdymo mokykloje gairės

Santrauka

Bendrosios nuostatos. Šiose gairėse¹ įvertinama matematinio ugdymo Lietuvos mokyklose dabartinė padėtis ir siūlomas veiklos planas siekiant šią padėtį pagerinti.

Gairėse naudojamos sąvokos:

Elementarioji matematika – matematikos sąvokos, objektai, jų savybės ir samprotavimo metodai matematikų bendruomenės daugumos pripažįstami esantys natūraliais, nepriskirtini vienai matematikos šakai ir plačiai naudojami skirtingose jos srityse.

Matematika – intelektinė veikla, nukreipta į bendrų dėsniumų (angl. *pattern*) pažinimą ir tirianti abstrakčias sąvokas, bei šios veiklos rezultatų visuma. Matematinės veiklos rezultatais yra matematikos sąvokos, sąryšiai tarp sąvokų ir jų tyrimo metodai. Matematika yra vienintelė žinojimo sritis, savo teiginių teisingumo kriterijumi naudojanti tik loginį pagrįstumą (matematinį įrodymą). Svarbiausiu matematikos bruožu yra samprotavimų loginis tikslumas (angl. *rigour*). Matematika plėtojama sprendžiant tas problemas, kurios atsiranda pačioje matematikoje. Dalis matematinės veiklos motyvuojama sprendžiant kitų žmogaus veiklos sričių problemas.

Matematikos sąvoka – matematikoje naudojama abstrakti sąvoka, kurią atitinkantis objektų rinkinys (sąvokos apimtis arba ekstensija) vienareikšmiškai apibūdinamas nurodytais požymiais (sąvokos turinys arba intensija).

Matematikos taikymas – matematikos srities naudojimas pasaulio pažinimui ar technologinei pažangai, matematikos sąvokas interpretuojant realaus pasaulio kontekste.

Matematinis mąstymas – logiškai tikslus samprotavimas apie matematikos sąvokas. Tikslus matematinio mąstymo apibūdinimas remiasi matematikos sąvokų analizės rezultatais.

¹ Pradinis gairių variantas yra UPC svetainėje: <http://www.upc.smm.lt/naujienos/matematika/gaires.php>

Matematinis raštingumas – gebėjimas atlikti standartines matematikos procedūras, nebūtinai suprantant jų matematinės prasmės, pakankamas buitinėje aplinkoje kylančioms užduotims spręsti.

Modernioji elementarioji matematika – elementarioji matematika, papildyta naujais matematikos didaktinės transformacijos pasiekimais, padedančiais plėtoti samprotavimų loginį tikslumą.

Sąvokinės matematikos žinios – gebėjimas apibūdinti matematikos sąvokas ir sąryšius tarp jų remiantis logiškai tiksliu samprotavimu, būtinas realaus pasaulio pažinimui.

Matematinio ugdymo problemos. Vykdomi mokinių pasiekimų tyrimai rodo žemą matematinio raštingumo lygį Lietuvos mokyklose. Sąvokinės matematikos žinios nėra tikrinamos. Netiesioginiai duomenys liudija dar blogesnę padėtį tokių žinių atžvilgiu. Žemi matematinio ugdymo standartai atsispindi egzaminų užduotyse ir vadovėliuose.

Apibendrinant gairių vertinimą, *pagrindine problema* yra ta, kad mokyklinės matematikos turinyje ir jos mokyme nėra matematikai būdingo samprotavimų loginio tikslumo. Gairių priede ši problema iliustruojama aptariant trupmenų mokymą 5-oje ir 6-oje klasėse. Be to, dabartinis matematinio ugdymo tikslas „sudaryti galimybę moksleiviams <...> pažinti pasaulį, jį aprašyti matematiniais modeliais, naudoti matematinius modelius sprendžiant įvairių mokslo sričių praktines ir teorines problemas“ nenumato moksleivių supažindinimo su pačia matematika. Tai yra tiesioginiai veiksniai galimai lemiantys žemą matematinio ugdymo kokybę. Netiesioginiai, bet ne mažiau svarbūs, veiksniai yra visą mūsų mokyklinio ugdymo sistemą kamuojančios problemos. Matematikos ugdyme jos pasireiškia šiomis problemomis:

- didelė moksleivių dalis mokymąsi supranta kaip pramogą, jie nepasiruošę sunkiai dirbti ir neturi motyvacijos mokytis matematikos, likusi moksleivių dalis ir mokytojai skundžiasi per mažu pamokų skaičiumi,
- siekiantys studijuoti matematikos mokytojo programą turi žemą pasiruošimo lygį, per mažas dėmesys skiriamas elementariosios matematikos studijoms ruošiant būsimus matematikos mokytojus, dabartiniai mokytojai pasigenda gerų seminarų,
- nėra paskatų matematikų bendruomenei domėtis mokyklinės matematikos problemomis ir atlikti šiuolaikinio lygio matematikos ugdymo mokslinius tyrimus,
- visuomenė neturi minimalių žinių apie šiuolaikinės matematikos prigimtį ir matematikos vaidmenį šiuolaikiniame pasaulyje.

Matematinio ugdymo tikslas. Minėtoji pagrindinė problema, samprotavimų loginio tikslumo trūkumas matematikos ugdyme, yra būdinga ne tik Lietuvai bet ir kai kurioms kitoms pasaulio

šalims (JAV, JK ir kt.). Tačiau problemos egzistavimo priežastys skirtingose šalyse gali būti skirtingos. Sprendžiant pagrindinę problemą reikia pasiekti matematikų bendruomenės dalyvavimo sprendžiant bendrojo ugdymo problemas ir sutarti dėl naujo matematinio ugdymo tikslo. Būtent, svarbiausiu matematinio ugdymo tikslu turėtų būti moksleivių *supažindinimas su matematika, parodant jos svarbą realaus pasaulio pažinime*. Šis tikslas yra priešingas dabar galiojančiam matematinio ugdymo tikslui; ne pasaulį pažinti naudojant matematiką, bet pažinti matematiką naudojant realaus pasaulio kontekstą.

Sąvokinės matematikos žinios yra vertingos daugumai žmogaus veiklų ir profesijų. Siekiant matematinio ugdymo tikslo, moksleiviai neturėtų būti profiliuojami pagal polinkius, visiems sudaromos galimybės realizuoti savo gebėjimus. Vietoje dabar turimų bendrojo ir išplėstinių kursų reiktų parengti du kokybiškai skirtingus matematikos programos kursus: standartinį ir sustiprintą. Baigiamasis matematikos egzaminas turėtų būti dviejų dalių. Pirmoji dalis skirta atsiskaitymui už standartinį kursą ir privaloma visiems. Antroji dalis skirta atsiskaitymui už sustiprintą kursą ir privaloma norintiems studijuoti universitete. Reikalingas kuo platesnis akademinės bendruomenės supratimas, kad matematinis išsilavinimas yra naudingas visiems - ir filosofams, ir ekonomistams, ir chemikams.

Matematinio ugdymo kaitos planas. Pritariant naujam matematinio ugdymo tikslui ir siekiant įgyvendinti samprotavimų loginio tikslumo ugdymą, reikalinga peržiūrėti mokyklinės matematikos turinį. Šiam darbui atlikti reikalinga:

- formuoti naujos matematinio ugdymo programos metmenis ir reikalavimus matematikos vadovėlių turiniui,
- kelti matematikos mokytojų profesinę kvalifikaciją ir motyvaciją,
- mokslo politikos priemonėmis skatinti matematikų bendruomenę dalyvauti tobulinant matematinį ugdymą,
- numatyti priemones skatinančias matematikos populiarinimą visuomenėje.

Detalus gairių įgyvendinimo planas yra šios studijos Priedas B.

Gaires rengė darbo grupė, kurios nariais ir konsultantais yra B. Budvytis, P. Gudynas, R. Januškevičius, E. Manstavičius, E. Mazėtis, L. Narkevičius, R. Norvaiša, Vyg. Paulauskas, R. Raudonis, R. Rudalevičienė, V. Sičiūnienė, M. Skakauskienė, V. Stakėnas, E. Stankus, A. Vilimienė, A. Zabulionis, S. Zybartas.

Studijos turinys. Santraukos teiginiai aptariami ir pagrindžiami šiuose studijos skyriuose:

1. Kodėl kalbame apie matematinio ugdymo kaitos gaires?
2. Matematinio ugdymo tikslai.
3. Dabartinė padėtis ir problemos.
4. Rekomendacijos.
5. Priedas A. Trupmenos samprata moderniojoje elementariojoje matematikoje
6. Priedas B. Matematikos mokymo gerinimo priemonių planas
7. Cituojama literatūra

1.Kodėl kalbame apie matematinio ugdymo kaitos gaires?

Kalbėti apie matematinio ugdymo kaitą verčia vis gilesnis supratimas, kad matematika tapo visuomenės ekonomikos ir kultūros pažangą lemiančiu veiksnium (žr. [Mathematics1], [Mathematics2]). Kaip ir bet kurios kitos šalies, Lietuvos perspektyvos išlikti stabiliai besivystančia šalimi, priklauso nuo visuomenės narių matematikos svarbos suvokimo ir nuo jų inovatyvaus matematinio mąstymo gebėjimų. Kita vertus, tarptautiniai (žr. [Jerrim]) ir nacionaliniai (žr. [NEC], [Kaminskiene]) matematikos mokymo pasiekimų tyrimų rezultatai ir mūsų šalies akademinės bendruomenės narių pasisakymai viešojoje erdvėje (žr. [Daškevičiūtė]) atskleidžia prastėjančio mokyklinės matematikos mokymo tendencijas. Lietuvoje pastebimos problemos nėra specifinės pasaulio kontekste. Mūsų išskirtinumą gal būt sudaro tai, kad mes vengiame atvirai kalbėti apie problemas ir pripažinti galimas klaidas.

Atsižvelgiant į kitose šalyse vykstančių matematinio ugdymo sistemų reformų patirtį, galima nurodyti bendro pobūdžio problemas būdingas ir mūsų šaliai.

Pirma, didelė visuomenės dalis, ypač jaunoji karta, nėra susipažinusi su šiuolaikine matematika. Taip yra todėl, kad dabartinėje mokykloje mokoma tokia matematika kokia ji buvo iki 18 amžiaus. 19 amžiuje įvykę radikalūs pokyčiai matematikos pagrinduose radikaliai pakeitė ir visą matematiką. Ji tapo žinių sistema, kuri tiesiogiai nesusijusi su pasaulio pažinimu, kaip buvo iki 18 amžiaus. Matematika pati savaime nėra pasaulio pažinimo instrumentas, ji neatsako į gamtos moksluose keliamą klausimą: „Kaip?“. Gamtos mokslų teiginių teisingumas vertinamas jų atitikimu realiajam pasauliui. Matematika suteikia gamtos mokslams reikalingas priemones,

kuriomis pažįstamas mus supantis pasaulis. Tuo tarpu matematikos teiginių teisingumas vertinamas jų loginiu neprieštarumu.

Kita vertus, vidurinio ugdymo programoje teigiama, kad „matematika – pasaulio pažinimo instrumentas ...“ (žr. [programa1]). Toks didelis požiūrių į matematikos sampratą neatitikimas verčia abejoti visos matematinio ugdymo programos pagrįstumu. Matematikos samprata yra nepaprastai svarbi, nes ji suponuoja matematikos ugdymo tikslą.

Antra, svarbiausia matematikos nauda ir vertybė yra žmogaus mąstymo galių ugdymas. Matematinis mąstymas nėra vien tik gebėjimas logiškai samprotauti. Dar svarbiau matematiniam mąstymui yra abstrakčios sąvokos, kurios yra tikrieji matematikos žinių elementai. Gebėjimas mąstyti matematiškai reiškia logiškai samprotauti apie abstrakčias sąvokas. Toks gebėjimas yra ilgo ir nuoseklaus darbo pasekmė.

Absoliuti visuomenės dauguma turėtų turėti galimybę susipažinti su matematinio mąstymo elementais. Kodėl? Nes matematika suteikia galimybę ir priemones tokiai kūrybos laisvei, kurią riboja tik žmogaus proto ir vaizduotės galios. Kūryba yra gebėjimas elgtis ne pagal taisykles, o matematinio samprotavimo taisyklės yra sukurtos paties žmogaus. Taigi, žmogaus valioje yra keisti tas taisykles. Palyginimui, meno kūryba papildomai ribojama atitinkamos meno rūšies raiškos priemonėmis.

Apie matematinio mąstymo svarbą filologams rašo A. Smetona [Liutkevičienė]:

„Filologui labai svarbus loginis mąstymas. Jo labai reikia kalbotyroje. Mūsų mokslas truputį spekuliatyvus, o spekuliacijos be logikos – nė iš vietos. Spekuliacijos be logikos yra demagogija. Norėtusi į fakultetą pritraukti daugiau tų, kurių matematikos pažymiai geri ir labai geri, bet kaip juos pritraukti?“

Tuo tarpu mokyklinė matematika, pateikiama kaip procedūrų ir faktų rinkinys, visiškai neatitinka šiuolaikinės matematikos svarbiausiems bruožams. Dėl tariamo nekūrybiškumo matematika priešpastatoma kitoms mokslo disciplinoms ir menams. Tokiu būdu prarandama svarbiausia motyvacija mokytis matematikos.

Trečia, matematinio ugdymo rezultatais Lietuvoje nėra patenkinti ne tik universitetų matematikai, bet ir gamtos mokslų atstovai. Biochemikas prof. A. Janulaitis teigia [Daškevičiūtė]:

„[socialiniai mokslai] patrauklesni ir dėl to, kad dažnai tokiose studijose nereikia tikslųjų mokslų, kurių daug kas nemėgsta. Visame pasaulyje tokia tendencija yra, bet Lietuvoje yra ydinga mokymo sistema mokyklose, kur profiliavimas nebuvo lydimas

profesionalaus moksleivių konsultavimo.“

Prof. Janulaičio nuomone, padėtį keisti reikia nuo mokyklų, reikėtų kai kuriuos laisvai pasirenkamus dalykus gražinti kaip privalomus. Prof. Janulaitis pastebi [D. Daškevičiūtė]:

„Trūksta suvokimo, kad matematikos mokymasis vysto ne vien „skaičiavimo“ gebėjimus, bet ir analitinį mąstymą, kuris praverčia įvairiausiose srityse, tarp jų ir humanitariniuose ar socialiniuose moksluose bei atitinkamoje praktinėje veikloje.“

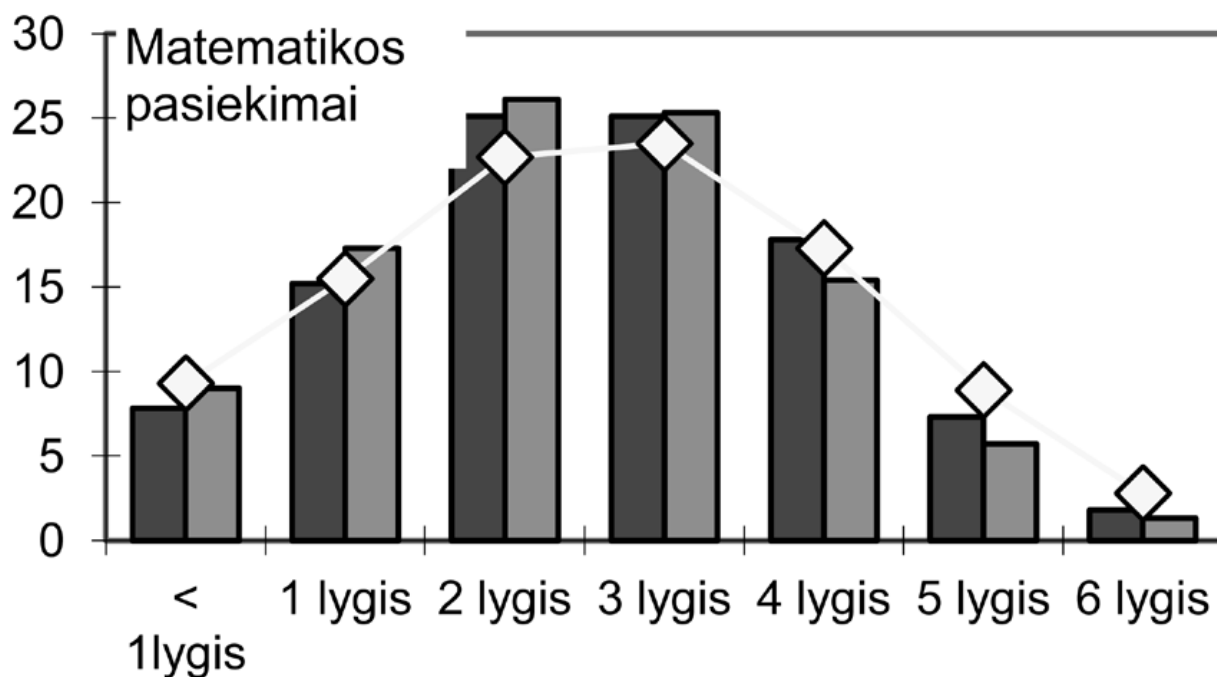
Tačiau dabartinis mokyklinės matematikos mokymas neugdo analitinio mąstymo gebėjimų.

Ketvirta, moksleivių pasiekimų tyrimai patvirtina mokslininkų nuomonę apie blogą matematikos mokymo padėtį. Matematikos sąvokų supratimo tarp Lietuvos moksleivių tyrimų yra labai maža. Dažniausiai yra tiriamos procedūrinės moksleivių žinios. Viena iš sunkiausių mokyklinės matematikos sąvokų yra paprastoji trupmena. Šios sąvokos įsisavinimas reikalauja abstraktaus mąstymo elementų. Trupmenos sąvokos supratimo tyrimą atliko V. Būdienė, o jos tyrimo išvada [Būdienė]:

„Daugelis moksleivių (apie 50 proc.) nepakankamai giliai suvokia paprastųjų trupmenų ir objekto dalijimo į lygias dalis ryšį; nesupranta trupmenos simbolio prasmės, turi klaidingai susiformavusį trupmenos vaizdinį; trupmenos nesuvokia kaip vientiso skaičiaus. Galima tvirtinti, kad pusė moksleivių susiformavo klaidingą arba silpną trupmenos vaizdinį.“

Prastos penktoje klasėje įgytos trupmenų žinios nulemia prastas vidurinio mokslo baigiamųjų klasių algebros žinias. Šį teiginį ekonometrine analize pagrindė amerikiečių mokslininkų grupė vadovaujama *R.S. Sieglerio* iš *Carnegie Mellon* universiteto, JAV. Mokslininkai tyrė dvi moksleivių grupes; vieną grupę sudarė amerikiečių moksleiviai, o kitą grupę sudarė Anglijos moksleiviai. Buvo tiriamos šių moksleivių matematikos žinios jiems būnant 10-ties ir 16-os metų amžiaus. 2012 m. birželio mėn. paskelbti rezultatai [Siegler] rodo, kad vidurinio mokslo algebros žinias apsprendžia trupmenų ir sveikųjų skaičių dalybos žinios. Tikėtina, kad šio tyrimo rezultatai prasmingi aiškinantis ir Lietuvos moksleivių matematikos pasiekimus.

Penkta, tarptautinės apklausos (TIMSS, PISA) vertina tik procedūrinius gebėjimus. Bet ir šiuo požiūriu mes neatrodome gerai. Kitoje lentelėje pavaizduoti Lietuvos 15-mečių matematikos pasiekimų pasiskirstymas (dalis proc.) pagal PISA tyrimų lygmenis rodo, kaip šie pasiekimai blogėja. Priminsime, kad <1 lygiui priskiriami blogiausius pasiekimus turintys moksleiviai, o 6 lygiui priskiriami geriausius pasiekimus turintys moksleiviai.



Šioje lentelėje juoda spalva – Lietuva 2006 m, pilka spalva – Lietuva 2009 m, ir rombas – šalių vidurkiai. Lentelė paimta iš studijos Valstybinė švietimo strategija 2013-2022 (žr. [Strategija] 6 psl.).

Jerrim ir *Choi* akademinėje studijoje [Jerrim] pateiktos lentelės taip pat iliustruoja Lietuvos moksleivių matematikos pasiekimų tendencijas. 9-10 metų Lietuvos moksleiviai, kaip ir Anglijos moksleiviai yra priskirti vidutiniokams 13 studijoje tiriamų šalių grupėje. Bet, skirtingai nuo Anglijos moksleivių, lietuvių ir Rytų Azijos šalių moksleivių pasiekimų skirtumas labai aiškiai didėja ir vidurinio mokslo pabaigoje Lietuvos moksleivių pasiekimai tampa prasčiausiais toje šalių grupėje (žr. [Jerrim], 2-a ir 3-ia lentelės). Taigi, Lietuvai reikėtų rūpintis ne tik pradiniu matematiniu išsilavinimu, bet ne mažiau reikia susirūpinti matematikos mokymu vidurinėje mokykloje.

Šešta, išsivysčiusiose šalyse matematiko kvalifikacija suteikia papildomą finansinę naudą lyginant su kitomis profesijomis. *Alisonas Wolfas* įvertino A-lygio matematinio išsilavinimo Anglijos mokykloje ekonominę grąžą. Savo knygoje (žr. [Wolf], 35-36 pusl) jis rašo, kad toks matematinis išsilavinimas suteikia 10% aukštesnį atlygį lyginant su tais, kurie turi žemesnį matematinį išsilavinimą.

Matematinis ugdymas – strategiškai svarbi, esminio atnaujinimo reikalaujanti bendrojo ugdymo sritis. Be matematinių žinių taikymo, matematinio modeliavimo ir be matematinės kūrybos Lietuva negalės sukurti konkurencingos ekonomikos ir modernios kultūros.

2. Matematinio ugdymo tikslai

Išsivysčiusiose šalyse matematikai tampant lemiančiu ekonomikos ir kultūros pažangos veiksniumi, turėtume siekti Lietuvos visuomenę supažindinti su matematika. Daugumai visuomenės narių pažintis su matematika prasideda ir baigiasi mokykloje. Kokia ta pažintis priklauso nuo matematikos mokymo turinio. Praeitame skyrelyje konstatavome, kad dabartinis matematikos mokymo turinys neatspindi šiuolaikinės matematikos. Pagrindiniu svarstymo objektu turėtų būti matematinio ugdymo tikslai, nes būtent jie apsprendžia matematikos mokymo turinį.

2.1. Dabartiniai matematinio ugdymo tikslai

Matematinio ugdymo tikslai formuluojami pagrindinio ir vidurinio ugdymo bendrosiose programose ([programa1] ir [programa2]). Pirmame dokumente rašoma (791 pusl.):

„Tikslas. Pagrindinėje mokykloje mokiniai įgyja matematinių žinių ir padedami mokytojų išsiugdo gebėjimus pagal savo intelektines bei charakterio savybes, kurios jiems leidžia socializuotis – mokytis ir įgyti profesiją derinant asmeninius bei Lietuvos valstybės interesus.“

Kitaip tariant, pagrindinės mokyklos matematinio ugdymo tikslas – paruošti moksleivį gyvenimui. Toks tikslo formulavimas nėra pakankamai konkretus tam, kad apspręstų matematikos mokymo turinį.

Dabartinėje matematikos vidurinio ugdymo programoje rašoma ([programa2], 3 pusl.):

„tikslas - sudaryti galimybę mokiniams plėtoti matematinę kompetenciją, t.y. gebėjimus ir nuostatas, pažinti pasaulį, jį aprašyti matematiniais modeliais, naudoti matematinius metodus sprendžiant įvairių mokslo sričių praktines ir teorines problemas“.

Tai reiškia, kad mokykloje nėra siekiama pačios matematikos pažinimo. Dabartinė matematinio ugdymo programa ignoruoja tai, kad pasaulį pažįsta gamtos mokslai, matematiką naudojantys tik kaip instrumentą arba kaip mokslo kalbą.

Tą patį bendrųjų programų tikslų trūkumą akcentuoja Lietuvos matematikai teigdami:

„Negerai, kad matematikos bendrosios programos nėra orientuotos į matematikos kaip mokslinės teorijos pagrindų perteikimą. Taip ir baigia mokyklas abiturientai, kurie moka tik žiūrėti į sprendus uždavinius ir bandyti taikyti jų sprendimus kitiems, dažnai tik iš

pirmo žvilgsnio panašioms, atvejams nagrinėti. Taip ir virsta tuščiomis deklaracijomis gražūs norai išmokyti jaunimą taikyti matematiką gyvenime, parodyti ryšius, išmokyti spręsti problemas. Abiejose programose vyrauja edukologinis aspektas, paliekant nuošalyje vidinius matematikos ryšius, loginio mąstymo ugdymą, dalyko turinį. Dominuoja tendencija vertinti pasiekimus pagal padarytą pažangą, o ne pagal pasiektus gebėjimus. Krenta į akis per didelis susižavėjimas kompetencijomis, mokymąsi suvokiant tarsi būdą gauti kurią nors kompetenciją. Taip traktuojant ugdymą, dingsta tiek matematikos vidiniai ryšiai, tiek matematikos ryšiai su kitais mokslais.“ ([Apynis], 69 pusl.)

Tie patys matematikai siūlo atsisakyti specialios baigiamojo egzamino programos [programa3], kuri yra siauresnė už vidurinio ugdymo bendrąsias programas. Teigiama ([Apynis], 70 pusl.), kad daugelyje vidurinių mokyklų ir gimnazijų iš esmės dirbama tik pagal egzaminų programą.

Dabartinis vidurinio ugdymo programos tikslas, pažinti pasaulį naudojant matematiką, gražinta iš Izaoko Niutono laikų, kai gamtos supratimas buvo tapatinamas su matematikos pažanga. Daugelis žino Galileo Galilėjaus posakį, kad gamtos knyga parašyta matematikos kalba. Bet mažai kas žino, pavyzdžiui, Alberto Einšteino posakį: „Tiek kiek matematikos teiginiai sietini su realybe, jie nėra neabejotini; tiek kiek jie yra neabejotini, jie nesietini su realybe“². Požiūris, kad „matematika – pasaulio pažinimo instrumentas“ atgijo mūsų vidurinio ugdymo programoje, o tuo pačiu ir daugumos mūsų piliečių pasaulėžiūroje. Dar visai neseniai tokį požiūrį diegė materializmo filosofija. Dabar pasaulėžiūrą formuojantys dalykai matematikos istorija ir matematikos filosofija dingo iš universitetinių studijų programų.

Net ir materializmo filosofijai esant dominuojančia ideologija, 1988 m. matematikos mokymo programoje formuluojami matematikos pažinimo tikslai – „duoti mokiniams matematikos žinių pagrindus ir sudaryti įgūdžius, reikalingus kiekvienam šiuolaikinės visuomenės nariui, pasiekti, kad mokiniai būtų pasirengę juos taikyti, mokydamiesi giminingų dalykų, sugebėtų tęsti mokslą“. 1994 m. vidurinės bendrojo lavinimo mokyklos programoje matematika tapo „vienu integralaus pasaulio suvokimo instrumentu“. Pradėta siūlyti vengti „perdėto formalizmo“.

Matematinio ugdymo tikslas - pažinti pasaulį naudojant matematiką - realizuojamas neskiriant matematikos objektų nuo realaus pasaulio daiktų ir reiškinių. Matematikos sąvokų aiškinimas realaus pasaulio pavyzdžiais dažnai naudojamas kaip lygiavertus jų apibrėžimui. Tekstiniai matematikos uždaviniai yra kita įsivaizduojama realaus pasaulio pažinimo priemonė naudojant matematiką. Pagal galiojančią tradiciją, tokiais atvejais realaus pasaulio kontekstas lyg ir turėtų

² “As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; as far as they are certain, they do not refer to reality” pagal J R Newman, *The World of Mathematics* (New York 1956).

atskleisti matematikos naudą. Tačiau dėl tekstiniuose uždaviniuose naudojamų situacijų trivialumo neretai pasiekiamas neigiamas efektas, moksleiviai nusivilia matematikos svarba ir galimai prarandama motyvacija mokytis matematikos (žr. [Ainley]).

Dabartinis matematikos ugdymo lygis negali pasiekti užsibrėžto tikslo – pažinti pasaulį. Pavyzdžiui, gamtamokslinė sąvoka „momentinis greitis“ yra matematikos sąvokos „funkcijos išvestinė“ interpretacija. Tačiau pastaroji sąvoka mokykloje nėra tiksliai apibrėžiama, o matematinio ugdymo programa net nenumato „ribos“ sąvokos nagrinėjimo. Matematikos vadovėliuose galima aptikti aiškinimą, kuriuo matematinė sąvoka „funkcijos išvestinė“ pakeičiama nesusipratimu: „funkcijos kitimo greičiu“. Dabartinis matematinis ugdymas vadintinas buitinės aplinkos pažinimu, kai svarbiausios matematikos sąvokos motyvuojamos ir aiškinamos naudojant picas, tortus, obuolius ir t.t.

Tikslas pažinti pasaulį naudojant matematiką yra realus ir pagrįstas tais atvejais, kai naudojantys matematiką ją išmano. Tokiais yra, pavyzdžiui, taikomiosios matematikos specialistai. Mokykloje realaus pasaulio pažinimas turėtų būti ne ugdymo tikslas, bet priemonė pažinti matematiką. Realaus pasaulio pavyzdžiai ir kontekstas turėtų būti tik motyvacija padedanti moksleiviui suprasti abstrakčias sąvokas.

Svarbiausiu matematinio ugdymo tikslu turėtų būti siekis *supažindinti moksleivius su matematika, parodant jos svarbą realaus pasaulio pažinime*. To reikėtų siekti pertvarkant dabartinę mokyklose mokomą elementariąją matematiką taip, kad ji turėtų svarbiausią matematikos bruožą – samprotavimų loginį tikslumą.

2.2. Matematinų samprotavimų loginis tikslumas.

Šiuolaikinė matematika yra žinių sistema apie tam tikras abstrakčias sąvokas ir loginius ryšius tarp jų. Matematikos sąvokos skiriasi nuo kitų abstrakčių sąvokų tuo, kad jos vienareikšmiškai apibrėžiamos savybių rinkiniu. Kaip jau minėta, svarbiausiu matematikos bruožu yra samprotavimų loginis tikslumas. Šis bruožas reiškia:

- tikslų visų sąvokų apibrėžimą;
- kiekvieno teiginio teisingumas yra paaiškinamas;
- tarp sąvokų ir procedūrų egzistuoja loginė tvarka, vadinama hierarchine struktūra.

Dabartiniuose vadovėliuose nesant tikslaus sąvokų apibrėžimo nėra įmanomas loginis samprotavimas. Jei vis dėlto apibrėžimas pateikiamas, tai paprastai jis nėra naudojamas pagrįsti toliau formuluojamas taisykles, o apibrėžiama sąvoka nėra lyginama su kitomis sąvokomis (žr. Priedas A).

Dėl įvairių istorinių priežasčių, mokyklinė matematika neturi čia formuluojamų matematikos bruožų. Ypač tai pasakytina apie matematinių samprotavimų tikslumą ir loginį pagrįstumą. Dabartinė mokyklinė matematika yra tarpusavyje mažai susijusių procedūrų, taisyklių ir faktų rinkinys. Matematikos vadovėliuose paprastai nėra tikslų sąvokų apibrėžimų ir dėl to nėra įmanomas logika pagrįstas samprotavimas. Matematikos sąvokos ir objektai yra pateikiami tik pavyzdžiais bei realaus pasaulio iliustracijomis. Mokyklinės matematikos turinį apsprendžia istoriškai sąlygota elementariosios matematikos samprata (žr. Gairių sąvokas). Elementariąją matematiką, kuriai būdingas samprotavimų loginis tikslumas, toliau vadinsime *moderniąja elementariąja matematika*.

Matematikos sąvokos labai skiriasi nuo realaus pasaulio sąvokų, naudojamų kasdieniniame gyvenime. Apibūdinant realaus pasaulio sąvokas dažniausiai pakanka remtis sąvokos apimtį sudarančiais konkrečiais pavyzdžiais. Toks sąvokos apibūdinimas nėra tikslus ir vienareikšmis. Matematikos sąvokai yra būtinas tikslus jos prasmės apibrėžimas dėl keleto priežasčių. Pirma, matematikos sąvokos apimtį sudarantys objektai realiame pasaulyje neegzistuoja. Be to, jauno žmogaus patirtis yra nepakankama matematikos sąvoką apibūdinti remiantis tik pavyzdžiais, su kuriais jis greičiausiai niekada nėra susidūręs. Antra, matematiniai objektai turi savybių, kurių neturi realaus pasaulio objektai. Pavyzdžiui, apie bet kuriuos du matematikos objektus galima pasakyti ar jie lygūs, ar ne, bent jau iš principo. Šią savybę naudojame tada, kai bandome nustatyti lygybę tarp konkrečios kvadratinės lygties šaknų (vienas objektas) ir tam tikros skaičių aibės (kitas objektas). Trečia, matematinis įrodymas yra loginis samprotavimas, kuriuo lyginami keli matematikos objektai ar kelios matematikos sąvokos. Toks lyginimas įmanomas tik žinant objektą apibūdinančias savybes, kurios matematikoje paprastai formuluojamos apibrėžtimi. Kol nėra žinoma vienareikšmė sąvokos apibrėžtis, tol nėra įmanomas matematinis įrodymas.

Tačiau mokyklinėje matematikoje nėra įmanoma matematiškai be priekaištų suformuluoti visas reikalingas sąvokas. Bandymai tai daryti 7-8 dešimtmečiais kai kuriose šalyse patyrė nesėkmes. Pavyzdžiui, mokykliniai bandymai aksiomų pagalba aiškinti tokias sąvokas, kaip *taškas*, *tiesė* ir *plokštuma*, nepateisino lūkesčių [Kilpatrick]. Pastaruosius kelis dešimtmečius bandoma rasti tokią moderniosios elementariosios matematikos formą, kuri

- 1) būtų suprantama ir ne matematikams,
- 2) išsaugotų svarbiausią matematikos savybę – samprotavimų loginį tikslumą.

Vienas tokių paieškų rezultatas, amerikiečių matematiko Hung-Hsi Wu pasiūlytas skaičiaus mokyklinis supratimas (žr. [Wu]) naudojamas šios studijos priede, aptariant trupmenų mokymą.

2.3. Ugdymo tikslų pasirinkimas.

Šiame skyrelyje kol kas suformulavome vieną matematinio ugdymo tikslą: supažindinti moksleivius su matematika, parodant jos svarbą realaus pasaulio pažinime. Jis nėra pakankamai

konkretus vertinti mokyklinės matematikos turinį. Tačiau pirmiausia reikalingas bendras matematikos ugdyme dalyvaujančių bendruomenių sutarimas dėl principinio matematinio ugdymo tikslo.

Svarstant konkretesnių tikslų variantus reikėtų atsižvelgti į tai, kad moksleiviai nėra ir negali būti vienodai gabūs matematikai. Bet visi moksleiviai turi turėti galimybes atskleisti ir realizuoti savo gabumus. Todėl pagrindinį ugdymo tikslą reikėtų suskaidyti į kelis lygmenis priklausomai nuo sudėtingumo.

Suskaidymą į lygmenis galima daryti įvairiai. Ateityje reikėtų spręsti kurį variantą pasirinkti. Be to, laikui bėgant, ugdymo tikslai ir jų santykinė svarba gali keistis [Ziegler]. Pavyzdžiui, galima būtų išskirti tokius du matematikos ugdymo tikslus:

1. supažindinti su matematikos galimybėmis spręsti buitinėje aplinkoje sutinkamus uždavinius;
2. supažindinti su matematinio mąstymo elementais naudojant pasaulio pažinimo kontekstą;
3. supažindinti su matematinio mąstymo elementais naudojant pasaulio pažinimo ir matematikos kontekstą.

Pirmasis tikslas reiškia, kad nagrinėjamos sąvokos ir sprendžiami uždaviniai realaus arba kasdieninio gyvenimo kontekste. Antrasis tikslas reiškia tų pačių dalykų nagrinėjimą naudojant kitų mokslo sričių motyvaciją. Trečiasis tikslas reikalauja, kad sąvokos būtų apibrėžiamos logiškai nepriekaištingai ir uždaviniai formuluojami matematiniam kontekste. Antrasis ir trečiasis tikslai yra būtina sąlyga tam, kad būtų įmanoma moksleivius supažindinti su matematinio įrodymo metodu.

Šiuo metu Lietuvos mokyklose siekiama tik pirmojo tikslo. Atsižvelgiant į moksleivių gebėjimus ir siekiant sudėtingesnių tikslų, galima būtų naudoti dabartinę dviejų lygių sistema. Šiuo metu ši dviejų lygių sistema kokybiškai nesiskiria ir abi siekia to paties, pirmojo, tikslo.

Konkrečių matematikos ugdymo tikslų formulavimas ir pasirinkimas turėtų būti tolesnių diskusijų objektu.

3.Dabartinė padėtis ir problemos

Šiame skyrelyje aptariamos specifinės problemos būdingos skirtingiems matematikos mokymo proceso dalyviams: moksleiviams, mokytojams ir mokytojų rengėjams.

3.1. Motyvacija mokytis matematikos.

Iš mokytojų tenka girdėti, kad mūsų švietimo sistema turi bendrą, ne tik matematikos mokymui būdingų, problemų. Viena iš jų yra ta, kad moksleiviai neturi noro sunkiai dirbti. Jiems diegiama mintis, kad mokymasis yra žaidimas ir pramoga. Vadovėliai vis labiau tampa tušti turinio atžvilgiu, bet pilni iliustracijų. Toks požiūris į švietimą ypač kenksmingas matematikos mokymui.

Mokiniai neturi motyvacijos mokytis matematikos. Kai kuriuose darbuose [Gudelytė] moksleivių motyvacija siejama su jų nusiteikimu vidurinio lavinimo mokykloje rinktis laikyti baigiamąjį matematikos egzaminą. Pastaruoju metu mažėjantis skaičius moksleivių, pasirenkančių laikyti baigiamąjį matematikos egzaminą, rodo motyvacijos mokytis matematikos mažėjimo tendenciją.

Daugumai mokinių matematika kelia baimės jausmą. Akivaizdu, jog svarbiausia to priežastimi yra matematikos hierarchinė struktūra. Viena nesuprasta sąvoka ar procedūra trukdo įsisavinti kitas nuo jos priklausančias sąvokas ar procedūras. Nesupratimas kaupiasi ir tampa panašiu į sniego gniūžtės efektą. Matematikos simbolinės kalbos nesupratimas įvardijamas kitu moksleivių baimės šaltiniu.

Nemažą įtaką motyvacijai mokytis matematiką, nesėkmėms bei baimės jausmui mokantis matematikos daro ir socialiniai stereotipai: esą, matematikai suprasti reikia įgimtų gabumų; berniukų mąstymas, lyginant jį su mergaičių mąstymu, yra geriau suderinamas su abstrakčiu mąstymu; skaičiuotuvai ir kompiuteriai mažina poreikį mokytis matematikos.

3.2. Matematikos programa, vadovėliai ir matematikos pamokos.

Reikšmingas problemų šaltinis yra žemas mokyklinės matematikos mokymo lygis. Matematika mokoma kaip atskirų, tarpusavyje nesusijusių faktų ir taisyklių rinkinys. Nesiekama suprasti matematikos teiginius ir procedūras, bet reikalaujama juos atsiminti. Sudaroma klaidinga iliuzija, kad kiekvienas matematinis klausimas turi vienintelį atsakymą, arba tu žinai tą vienintelį atsakymą, arba ne. Gebėjimas spręsti olimpiadinius uždavinius neužtikrina matematikos supratimą.

Matematikos vadovėlių lygis orientuotas į vidutinio pažangumo moksleivį. Gabesni matematikai moksleiviai neturi galimybių gilinti savo matematikos žinias. Pastaruosius 20 metų beveik neleidžiama nauja papildoma mokyklinės matematikos literatūra.

Nepakanka matematikos pamokų tam, kad pasiekti bendrojoje ugdymo programoje numatytų tikslų. Atsakydama į klausimą: „Ar pakanka matematikos pamokų?“, matematikos mokytoja ekspertė V. Šileikienė teigia [Gudavičė]:

„O čia yra dar vienas atsakymas, kodėl vaikams vis sunkiau įkandama matematika. Pamokų akivaizdžiai yra per mažai. Senais laikais aštuntokams būdavo 5-6 savaitinės matematikos pamokos, dabar jie turi tik keturias, o, pavyzdžiui, dešimtokai – tik 3. Ir patys vaikai sako, kad jiems nepakanka tiek pamokų. Bet tokia tvarka nustatyta prieš kokius septynerius metus. Dabar ir skiname tokių pakeitimų vaisius. Sovietiniais laikais nebūdavo tokių dalykų, kad vaikas nemokėtų trupmenų suskaičiuoti, o dabar vaikai kalkuliatoriais apsikrovę, o skaičiuoti nebemoka.“

Moksleivių egzaminavime dominuoja procedūrų ir faktų žinojimo tikrinimas. Tuo tarpu sąvokų supratimas egzaminų metu beveik netikrinamas.

3.3. *Matematikos mokytojai.*

Kitokio pobūdžio problemos kyla dėl neadekvataus matematikos mokytojų ruošimo. Matematikos mokytojų ruošimui būdingas, taip vadinamas, „dvigubo trūkio efektas“: mokyklinė matematika – universitetinė matematika – mokyklinė matematika. Baigusi mokyklą ir įstojusi į universitetą būsima matematikos mokytoja mokoma universitetinės matematikos. Deja, universitetinės matematikos žinios nepadedą mokyklinės matematikos geresniam supratimui. Baigusi universitetą, jauna matematikos mokytoja vėl susiduria su mokykline matematika, kurią buvo pamiršusi studijuodama universitete.

Vargu ar galima atsisakyti universitetinės matematikos studijų ruošiant matematikos mokytojus. Siekiant būti tikru savo dalyko žinovu, skirtingai nuo kitų ugdymo ir mokslo sričių (fizika, chemija ir t.t.), matematikos mokytojams, kaip ir visiems matematikams, reikalinga matematinė branda (žr. [Krantz]), t.y. gebėjimai:

- suprasti ir naudoti vis abstraktesnes idėjas;
- nuo konkrečių pavyzdžių pereiti prie abstrakčių sąvokų;
- sugalvoti konkrečius pavyzdžius;
- naudotis matematiniais simboliais;
- paaiškinti matematikos sąvokų esmę;
- formuluoti užduotis išryškinant jų sunkiąsias vietas;
- paaiškinti, kuo reikia naudotis sprendžiant uždavinius;
- atpažinti įrodymo korektiškumą ir loginio samprotavimo klaidas;

- atpažinti matematinius dėsningumus;
- laisvai naudotis analizinėmis, algebrinėmis ir geometrinėmis sąvokomis;
- pereiti nuo intuityvaus prie logiškai tikslaus;
- mokytis iš klaidų;
- tinkamai nukreipti įrodymo kelio paieškas;
- naudoti apytikslius faktus ieškant tikslų teiginių.

Visa tai įgyjama studijuojant matematiką ir ne tik universitetinių studijų laikotarpiu. Daugiau negu bet kurios kitos disciplinos, matematikos ugdymas priklauso nuo to, kaip mokytojas supranta matematikos prigimtį, jos istoriją ir filosofiją.

Siekiant sumažinti „dvigubo trūkio efektą“, greta universitetinės matematikos ir matematikos didaktikos, būsimiems mokytojams reikalinga studijuoti moderniąją elementariąją matematiką. Kai kurios matematikos mokytojų ruošimo programos, pavyzdžiui, Vilniaus universitete, turi pakankamai stiprią matematinę aplinką reikalingą tokioms studijoms. Bet ar ilgam ja bus galima naudotis? Vykdamas aukštojo mokslo reformą 2010 metais matematikos mokytojų ruošimas perregistruotas į Socialinių mokslų srities Pedagogikos kryptį (anksčiau buvo Fizinių mokslų srityje Matematikos kryptyje). Tokiu atveju matematika tampa gretutinėmis studijomis. Tai reiškia matematikos dalykams reikalaujamų kreditų skaičiaus mažėjimą. Kita problema yra plintanti tendencija ruošti kelių ugdymo dalykų mokytojus. Netgi informatikos jungimas su matematika ruošiant mokytojus yra švietimo kokybės aukojimas siekiant taupyti lėšas.

Mokytojų liudijimu mes turime didelių problemų su pradiniu matematiniu ugdymu. Apie pradinių klasių mokytojų gebėjimus mokyti matematikos V. Šileikienė (matematikos mokytoja ekspertė) taip sako [Gudavičė]:

„Žinote, aš skaičiau paskaitas pradinių klasių mokytojo specialybę pasirinkusiems studentams, ir paaiškėjo, kad *tik vienas ketvirtadalis jų sugeba gerai skaičiuoti*. Visi kiti neslepia nemėgstantys matematikos ir nesisielojantys dėl to, kad jie mokys vaikus matematikos pagrindų.“

D. Česnauskienė (matematikos ir jos mokymo dėstytoja Klaipėdoje) apie pradinių klasių mokytojų studijas rašo [Česnauskienė]:

„Tenka pripažinti, kad į pradinių klasių studijas ateina jaunimas su prastesnėmis matematikos žiniomis, *ir tai yra normalu*: puikiai išmanantys tiksluosius mokslus renkasi *rimtesnes specialybes*. <…> Kita vertus, palyginti su sovietiniais laikais, pradinių

klasių mokytojams dabar suteikiama mažiau matematinių žinių. Anksčiau jie turėdavo 4 semestrus aukštosios matematikos ir dar 2 metodikos, dabar iš viso tėra 2 semestrai.“

Prof. R. Januškevičiaus teigimu, pastaruoju metu, Lietuvos edukologijos universitete Matematikos katedros dėstytojai yra nušalinti ir daugiau nedalyvauja pradinių klasių mokytojų ruošime.

3.4. *Matematikų bendruomenė ir matematikos didaktika.*

Nemažai matematikų bendruomenės narių aktyviai dalyvauja moksleivių olimpiadų ir konkursų organizavimo veikloje. Gal būt todėl šios veiklos rezultatai yra ryškūs. Tačiau mokykline matematika domisi tik mokytojų ruošimo programoje dirbantys matematikai. Beveik nėra bendravimo tarp matematikos mokytojų ir kitų dalykų matematikos dėstytojų. Dar mažiau yra bendravimo tarp matematikos mokytojų ir matematikos tyrėjų. Iš esmės visas matematikų dalyvavimas sprendžiant mokyklinės matematikos problemas apžvelgiamas kasmetinėse Lietuvos matematikų draugijos konferencijose. Tačiau tokios veiklos nepakanka norint bent kiek reikšmingiau įtakoti mokymo programas, egzaminų tvarką, galiausiai matematikos mokymo lygį. Jau dešimt metų matematikų bendruomenė neturi leidinio, kuriame galėtų diskutuoti apie matematiką, jos prigimtį ir mokymą, reikšti savo nuomones švietimo ir mokslo politikos klausimais. Pasekmė – matematikai iki šiol neturi išdiskutuoto požiūrio į matematikos mokymo padėtį.

Kadangi matematikų bendruomenė nėra aktyvi veikėja rūpinantis mokyklinės matematikos turiniu, šį vaidmenį atlieka mūsų edukologai. Būtent matematikos didaktika atsako į klausimus: „Kokie yra matematikos mokymo tikslai?“ ir „Koks turi būti matematikos mokymo turinys ir struktūra?“. Matematiniam ugdymui dalyvaujančius mokytojus latviai A. Andžāns ir L. Ramāna apibūdina tokiais keturiais jų tipais (žr. [Andžāns]):

	matematikoje	didaktikoje
A	stiprūs	stiprūs
B	stiprūs	silpni
C	silpni	stiprūs
D	silpni	silpni

Jie mano, kad C situacijos tipas yra pavojingiausias, nes tokie matematikos mokytojai gali įtaigiai perduoti visiškai klaidingas žinias moksleiviams. Šis pavojus latvius skatino stiprinti matematikos edukologinius tyrimus. Mums šis pavojus turėtų turėti nemažesnę reikšmę.

4.Rekomendacijos

Matematinio ugdymo kaita turėtų būti siejama su pagrindinio matematinio ugdymo tikslo, supažindinti moksleivius su moderniąja elementariąja matematika, įgyvendinimu. Siekiant šio tikslo matematika atsiskleidžia kaip kūrybos bei logiško mąstymo šaltinis ir kaip mokslinio pažinimo pagrindas. Tokiu būdu galima tikėtis gerokai paskatinti moksleivių motyvaciją mokytis matematikos. Pagrindiniu matematinio ugdymo kaitos veikėju turėtų tapti matematikų bendruomenė sudarius tam tinkamas prielaidas.

4.1.Matematikų bendruomenė.

Pirmiausia būtina atkurti(sukurti) leidinį, gal būt elektroninėje formoje, kuriame matematikų ir matematikos mokytojų bendruomenės galėtų diskutuoti apie matematiką ir matematinio ugdymo problemas. Be bendro daugumos profesionalų sutarimo dėl to, ką daryti, realūs pokyčiai sunkiai įgyvendinami.

Panaudoti mokslo politikos svertus tam, kad paskatinti matematikus domėtis mokyklinės matematikos problemomis. Pripažinti mokyklinės matematikos turinį matematikos dalimi įtraukiant „Moderniąją elementariąją matematiką ir matematikos didaktiką“ į mokslo klasifikavimo sistemą tarp kitų matematikos dalykų. Mokslo politikos priemonėmis skatinti mokslinius tyrimus susijusius su moderniąja elementariąja matematika ir matematikos didaktika.

Reikėtų ruošti projektą: „moderniosios elementariosios matematikos plėtra“. Galima būtų siekti įjungti šį projektą į Lietuvos mokslo tarybos finansuojamą Nacionalinę mokslo programą.

4.2.Matematikos mokytojų ruošimas.

Reikia tobulinti matematikos mokytojų rengimą ir kompetencijos tobulinimą. Pasiiekti, kad studijuoti matematikos mokytojo profesijos studijų gabūs matematikai, motyvuoti jaunuoliai. Reikia parengti nacionalinius matematikos mokytojų rengimo standartus, kuriuose būtų aprašyta gero matematikos mokytojų rengimo vizija.

Matematinio mąstymo ir problemų sprendimo gebėjimų ugdymas turėtų prasidėti nuo pradinių klasių. Todėl atitinkamai turėtų būti ruošiami pradinė klasių mokytojai. Pasiiekti, kad šiame ruošime dalyvautų ne tik edukologai bet ir matematikai.

Reikėtų papildyti matematikos mokytojų ruošimo kursus moderniąja elementariąja matematika, šiuolaikinės matematikos istorija ir filosofija.

4.3. Programa, pasiekimų vertinimas, vadovėliai.

Vidurinio ugdymo bendrojoje programoje pateikti dabartinę matematikos sampratą: žinių sistemą apie abstrakčias sąvokas ir jų loginius ryšius. Atskleisti matematikos vietą kultūros ir mokslo kontekste, bei jos istorinio vystymosi etapus. Papildyti matematinio ugdymo tikslus: supažindinti su matematinio mąstymo elementais ir matematikos galimybėmis spręsti realaus pasaulio problemas.

Matematikos ugdymo turinys iki 8 klasės Bendrosiose programose turi būti pateikiamas detaliau – ne dviejų metų laikotarpiams, kaip ligi šiol, bet kiekvieniems mokymosi metams. Ypač svarbu, kad Bendrosiose programose būtų detaliau aprašyta programuojama mokinių mąstymo gebėjimų eiga.

Reikia iš esmės peržiūrėti bendrajam ugdymui taikomų matematinių užduočių visumą. Atlikdami kokybiškai kitokias matematinės užduotis, kurios skatintų savarankiškai mąstyti, suprasti ir taikyti matematiką, mokiniai gali pasiekti gerų matematikos mokymosi rezultatų.

Matematikos mokymo metodika turi būti atnaujinta, atsižvelgiant į naujausius matematikos didaktikos, pedagogikos, psichologijos, smegenų tyrimų ir kitus mokslo atradimus. Matematikos mokymo būdai turi būti tikslingai pritaikyti skirtingų amžiaus tarpsnių, abiejų lyčių, įvairių gebėjimų mokiniams iš įvairios socialinės aplinkos.

Ieškoti būdų kaip vertinti moksleivių pasiekimus įsisavinant matematikos sąvokas, matematinį samprotavimą ir gebėjimą spręsti problemas. Toks vertinimas turėtų būti naudojamas egzaminuose ir tobulinant nacionalinį mokinių pasiekimų tyrimą.

Mokinių matematikos mokymosi pasiekimų tyrimai ir stebėseną turi būti vykdoma nacionaliniu, savivaldybių ir mokyklų lygmenyse. Sprendimai dėl matematikos ugdymo kaitos turi būti grindžiami tokių tyrimų ir stebėsenų rezultatais.

Egzaminų sistema turi ne trukdyti, bet skatinti mokinius mokytis matematikos. Mokiniais turi būti siūlomos bent dviejų skirtingų lygių matematikos pagrindinio ugdymo pasiekimų patikrinimo užduotys – mažiau ir daugiau matematikos mokymesi pažengusiems mokiniams. Reikia pasiekti, kad matematikos brandos egzaminą laikytų visi abiturientai.

Reikia įvykdyti kokybinį šuolį matematikos vadovėlių ir matematinio švietimo priemonių rengime. Mokslo politikos svertų pagalba reikėtų skatinti matematikų bendruomenės narius rengti naujus vadovėlius, rašyti matematikos populiarinimo knygas, vertinti jau parengtus

vadovėlius. Recenzijas vadovėliams turėtų pateikti nuo leidyklų nepriklausantys ekspertai. Recenzijos turi būti viešos, atskleidžiančios teigiamas ir neigiamas vadovėlių puses.

Vadovėlių tekstai turi atitikti Bendrojoje programoje numatytą matematikos sampratą, atspindėti svarbiausius matematikos vystymosi etapus, supažindinti su matematikos tyrimais Lietuvoje. Vadovėliuose reikėtų pateikti skirtingo sudėtingumo matematikos turinį aiškiai tai pažymint. Vadovėliai turi būti patrauklūs ir suprantami mokiniams.

5.Priedas A. Trupmenos samprata moderniojoje elementariojoje matematikoje

Šiame priede aptariamos problemos susijusios su trupmenų mokymu 5-6 klasėse ir kaip jos galėtų būti sprendžiamos. Trupmenos sąvoka yra viena pirmųjų sukelti rimtų sunkumų mokantis matematikos mokykloje. Vėliau tokių sunkumų tik daugėja. Siekiant įveikti šiuos sunkumus paprastai naudojamos įvairios pedagoginės priemonės. Trupmenos sąvoką stengiamasi padaryti paprastesne ir aiškesne interpretuojant ją realaus pasaulio kontekste, pavyzdžiui, dalinant picą ar tortą į dalis. Pagrindinė problema yra ta, kad trupmena nėra apibrėžiama matematiškai tiksliai.

Be abejonės, pirmosiose mokyklos klasėse neišvengiamai tenka pradėti nuo intuityvios trupmenos sampratos. Tačiau 5-oje ar 6-oje klasėje būtina žengti pirmuosius žingsnius bandant aiškinti abstrakčias sąvokas. Būtina todėl, kad vyresnėse klasėse, susipažįstant su algebra, abstrakcija tampa dar didesne.

Penktos klasės vadovėliuose yra įprasta trupmenos aiškinimą pradėti nuo picos dalinimo, kaip ir pradinėse klasėse. Toliau apie trupmenas pasakome bent keletas dalykų, vienas po kito:

- trupmena yra *dalmuo*, gautas vieną sveikąjį skaičių dalijant iš kito sveikojo skaičiaus;
- trupmena yra viena ar kelios lygios *vieneto* (ar visumos) *dalys*;
- trupmena yra dviejų sveikųjų skaičių *santykis*;
- trupmena yra *dydis* dalies gautos objektą (picą) dalinant į lygias dalis;
- trupmena yra *taškas* skaičių spindulyje.

Tokia trupmenos apibūdinimų gausa yra pirmoji problema. Trupmena siejama su iš pažiūros labai skirtingomis sąvokomis. Pirmą kartą bandančiam suprasti trupmenos prasmę, tai yra sunkus išbandymas. Antroji panašių apibūdinimų problema yra ta, kad nei vienas jų nėra naudojamas paaiškinti visas trupmenų savybes, tokias kaip trupmenų ekvivalentumas, tvarka tarp trupmenų ir

aritmetinės operacijos su trupmenomis. Kiekviena trupmenų savybė apibrėžiama pasitelkiant vienu iš daugelio apibūdinimu arba tik iliustruojant pavyzdžiais.

Trupmenos 5-oje mokyklos klasėje yra pirmasis moksleivio susidūrimas su abstrakcijomis. Dabartinis trupmenų mokymas visiškai ignoruoja esminius matematikos bruožus: tikslų sąvokų apibrėžimą, susijusių sąvokų (šiuo atveju sveikųjų skaičiaus ir trupmenos) loginį suderinamumą ir savybių bei procedūrų paaiškinimą remiantis sąvokų apibrėžtimis. Be supratimo, trupmenų savybes ir procedūras tenka mokytis mintinai. Neišvengiamai prarandama mokinio motyvacija mokytis matematikos.

Reikia pripažinti, kad analogijos ir metaforos labai padeda suprasti sudėtingas sąvokas ir nenuostabu, kad jos naudojamos mokyklinėje matematikoje. Bet analogijos ir metaforos negali pakeisti tikslų apibrėžimų. Matematikoje racionalieji skaičiai ir aritmetinės operacijos su jais apibrėžiami naudojant ekvivalentumo klases, o tai yra per daug abstraktu moksleiviams. Todėl reikia rasti kompromisinį variantą suderinamą su abstraktaus mąstymo reikalavimais.

Toliau pabandydysime paaiškinti *Hung-Hsi Wu* siūlomą trupmenų sampratą (žr.[Wu]). Pabrėžiame, kad šis aiškinimas skirtas matematikos mokytojui. Naudodami pedagogines priemones, mokytojai galėtų kvalifikuotai perteikti idėjas moksleiviams. Šiame aiškinyje praleidžiamas natūraliųjų skaičių aritmetikos įvadas ir naudojamos kai kurios geometrijos sąvokos (geometrinė tiesė, taškas ant tiesės, atkarpa, kongruencija).

Skaičių tiesė ir kitos susijusios sąvokos. Skaičių tiesė yra geometrinė tiesė, kurioje vienodu atstumu išsidėstę taškai žymi nulį ir natūraliuosius skaičius. Reikalingos sąvokos, kurios padėtų papildyti skaičių tiesę trupmenas žyminčiais taškais.

Apibrėžtis. Tarkime, kad $[a,b]$ ir $[b,c]$ yra dvi tos pačios tiesės atkarpos, turinčios vieną bendrą tašką b . Šių atkarpų *jungtis* yra atkarpa $[a,c]$.

Taip pat apibrėžiama bet kurio skaičiaus vienas kitą liečiančių intervalų jungtis.

Apibrėžtis. Sakysime, kad geometrinės tiesės taškų poros (T,S) ir (U,V) yra *vienodai nutolusios*, jei jų sudarytos atkarpos $[T,S]$ ir $[U,V]$ yra kongruencijos, t.y. pastūmus $[T,S]$ taip, kad T sutaptų su U , S turi sutapti su V .

Geometrinės tiesės taškų pora (T,S) vienareikšmiškai apibrėžia atkarpą $[T,S]$. Apie atkarpas sakysime, kad dvi ar daugiau atkarpų turi *vienodą ilgį*, jei jos yra kongruentiškos. Kol kas neapibrėžiame, kas yra atkarpos ilgis.

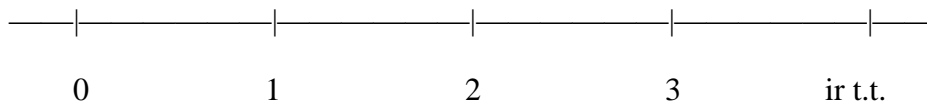
Tarkime, kad geometrinėje tiesėje yra pažymėtas nulis ir taškas T esantis į dešinę nuo nulio. Stumkime atkarpą $[0,T]$ į dešinę nuo nulio tol, kol kairysis atkarpos galas nulis sutaps su T .

Pastumtos atkarpos dešinį galą žymėkime $2T$, t.y. atkarpos $[0,T]$ ir $[T,2T]$ turi vienodą ilgį. Nuosekliai kartodami atkarpos $[0,T]$ stumimą, gauname taškus $0,T,2T,3T,\dots$, kurie sudaro tai, ką vadinsime *taško T kartotinių taškų seka*. Šioje sekoje T vadinamas *taško T pirmuoju kartotiniu tašku*, $2T$ vadinamas *taško T antruoju kartotiniu tašku* ir t.t. Taško T kartotinių taškų sekos iliustracija:



Dabar priminsime skaičių tiesės apibrėžimą.

Apibrėžtis. Duotoje geometrinėje tiesėje pasirenkame du skirtingus taškus: pirmasis kairėje žymi 0 (nulį), o kitas žymi 1 (vienetą). Vieneto kartotinius taškus vadinsime natūraliaisiais skaičiais. *Skaičių tiesė* yra geometrinė tiesė su natūraliuosius skaičius žyminčiais taškais:



Atkarpa tarp taškų 0 ir 1 vadinama *vienetine atkarpa* ir žymima $[0,1]$. Sakysime, kad vienetinei atkarpai kongruentiškos atkarpos ilgis yra lygus vienetui. Vėliau apibrėšime atkarpos ilgį, kurio reikšmė yra trupmena.

Turėdami skaičių tiesę galime apibrėžti skaičiaus sąvoką.

Apibrėžtis. *Realusis skaičius* yra taškas skaičių tiesėje.

Matematikoje realusis skaičius nėra tapatinamas su tašku skaičių tiesėje. Realusis skaičius yra elementas aibės, kurioje aksiomų pagalba apibrėžta tam tikra struktūra (pilnas sutvarkytas laukas). Matematikoje naudojama (pvz. analizinėje geometrijoje) Cantoro-Dedekindo aksioma: tarp geometrinės tiesės taškų ir realiųjų skaičių aibės egzistuoja tvarką išsauganti abipus vienareikšmė atitiktis. Realiųjų skaičių tapatinimas su taškais geometrinėje tiesėje yra pateisinamas mokyklinėje matematikoje siekiant: (1) tiesių atsakymų į paprastus klausimus (pvz., kas yra skaičius); (2) parodyti, kad sveikieji skaičiai, trupmenos (racionalieji skaičiai) ir iracionalieji skaičiai yra tos pačios rūšies objektai; (3) logiškai tiksliai pagrįsti aritmetikos veiksmus su skaičiais.

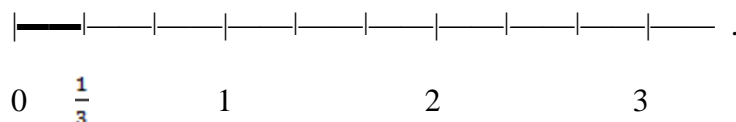
Čia apsiribojame teigiamais realiaisiais skaičiais norėdami paaikškinti tik idėjas. Skaičių tiesėje jau turime pažymėtus natūraliuosius skaičius. Todėl tolesnis mokytojo uždavinys yra skaičių

tiesėje nurodyti racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių vietas (taškus), bei tokia jų samprata pagrįsti aritmetines operacijas tarp skaičių. Skaičių tiesėje turime natūraliuosius skaičius. Du skaičiai yra lygūs, žymima $=$, jei jų vieta skaičių tiesėje yra ta pati.

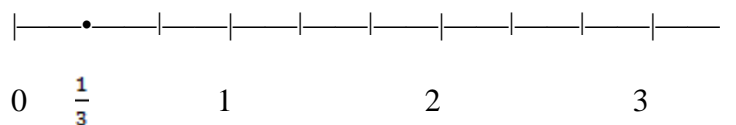
Trupmenos apibūdinimas. Siūlomas trupmenos apibūdinimas grindžiamas galimybe atkarpą padalinti bet kuriuo skaičiumi vienodai nutolusių taškų, arba, kas yra tas pats, atkarpą padalinti bet kuriuo skaičiumi vienodo ilgio atkarpų.

Pirmiausia skaičių tiesėje nurodysime tas trupmenas, kurių vardikliais yra skaičius trys, t.y. trupmenas $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, ir t.t.

Vienetinę atkarpą $[0,1]$ daliname į tris vienodo ilgio atkarpas $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ir $[\frac{2}{3}, 1]$, kurių jungtis yra vienetinė atkarpa. Kiekvieną kitą atkarpą $[1,2]$, $[2,3]$,.. tokiu pačiu būdu padaliname į tris vienodo ilgio atkarpas. Taip gautų visų atkarpų ilgiai yra vienodi, nes jie kongruentiški. Pirmąją atkarpą $[0, \frac{1}{3}]$ pasirinkime trupmenos $\frac{1}{3}$ standartine išraiška:

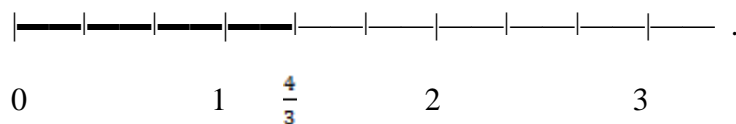


Ši atkarpa vienareikšmiškai nusakoma savo dešiniuoju galu:

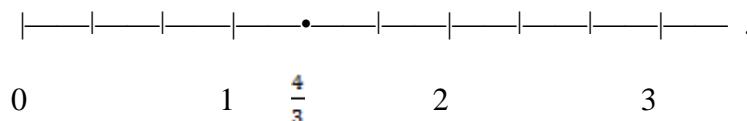


Tai yra taškas skaičių tiesėje toliau tapatinamas su trupmena $\frac{1}{3}$. Taip pat sakysime, kad atkarpos $[0, \frac{1}{3}]$ ilgis yra $\frac{1}{3}$.

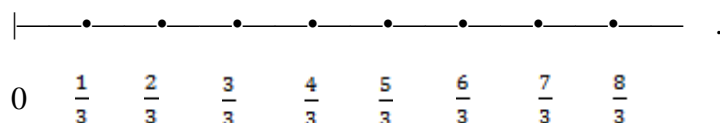
Panašiu būdu, imant vienetinių atkarpų trečdalius ir apjungus bet kuriuos keturis iš jų, galima gauti trupmenos $\frac{4}{3}$ išraišką. Dėl vieneties, pasirinkime pirmųjų keturių atkarpų jungtį, vadindami ją trupmenos $\frac{4}{3}$ standartine išraiška:



Kadangi ši atkarpa vienareikšmiškai nusakoma savo dešiniuoju galu, tai jį tapatinsime su trupmena $\frac{4}{3}$:



Bendru atveju, su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi m , trupmena $\frac{m}{3}$ yra pirmųjų m vienetinės atkarpos trečdalių jungties dešinysis galas. Gauti skaičių tiesės taškai sudaro tai, kas toliau vadinama *trečdalių aibe*:



Pastebėsime, kad trečdalių aibę sudaro taško $\frac{1}{3}$ kartotiniai taškai.

Samprotavimai apie trupmenas, kurių vardikliais yra trejetas, apibendrinami trupmenoms, kurių vardikliais yra bet kuris natūralusis skaičius $n=1,2,3,\dots$. Panašiu būdu, dalindami vienetines atkarpas į n dalių, gauname trupmenų $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$ standartines išraiškas atkarpomis. Šių atkarpų dešinieji galai skaičių tiesėje sudaro tai, kas vadinama *n -tųjų dalių aibe*. Šią aibę sudaro taško $\frac{1}{n}$ kartotiniai taškai.

Dabar esame pasiruošę apibrėžti trupmenos sąvoką.

Apibrėžtis. Duotam natūraliajam skaičiui n , skaičių tiesės vienetinę atkarpą $[0,1]$ padaliname į n vienodo ilgio atkarpų. Nuo nulio pirmosios gautos atkarpos dešinysis galas yra taškas, žymimas simboliu $\frac{1}{n}$. Taško $\frac{1}{n}$ kartotiniai taškai sudaro n -tųjų dalių aibę, kurios elementus žymi simboliai $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$. Visi šių aibių elementai kai $n=1,2,3,\dots$ sudaro *trupmenų aibę*.

Pagal apibrėžimą, trupmena yra taškas skaičių tiesėje. $\frac{m}{n}$ yra trupmenos simbolis žymintis trupmeną, kuri yra taško $\frac{1}{n}$ m -tasis kartotinis taškas.

Apibrėžtis. Lygybė $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ reiškia, kad trupmenų simboliais $\frac{a}{b}$ ir $\frac{m}{n}$ žymimi taškai yra vienas ir tas pats taškas skaičių tiesėje. Be to, nurodytos lygybės atveju sakoma, kad *trupmenų simboliai $\frac{a}{b}$ ir $\frac{m}{n}$ yra ekvivalentūs*.

Taigi, kai $n=1$, taško $\frac{1}{1}$ kartotiniai taškai $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots, \frac{m}{1}, \dots$ yra lygūs atitinkamiems natūraliesiems skaičiams $1, 2, \dots, m, \dots$. Be to, natūralieji skaičiai išreiškiami trupmenomis:

$$\frac{n}{n} = 1, \frac{2n}{n} = 2, \dots, \frac{kn}{n} = k,$$

su bet kuriuo teigiamu natūraliuoju skaičiumi n .

Kitas teiginys nurodo pakankamas sąlygas tam, kad du trupmenų simboliai būtų ekvivalentūs.

Teiginys. Tarkime, kad $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ yra du trupmenų simboliai ir egzistuoja toks teigiamas natūralusis skaičius c , kad $k = cm$ ir $l = cn$. Tada $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$.

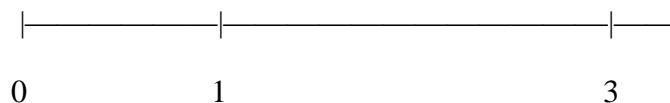
Įrodymas. Pagal apibrėžimą, $\frac{m}{n}$ yra taško $\frac{1}{n}$ m -tasis kartotinis taškas, t.y. atkarpa $[0, \frac{m}{n}]$ yra m vienodo ilgio atkarpų $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, [\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ jungtis. Kiekvieną iš šių atkarpų daliname į c vienodo ilgio atkarpų. Šių dalinimų pasekmė yra vienetinės atkarpos $[0, 1]$ padalinimas į nc vienodo ilgio atkarpų. Kadangi $\frac{1}{n}$ yra taško $\frac{1}{nc}$ c -tasis kartotinis taškas, tai $\frac{m}{n}$ yra taško $\frac{1}{nc}$ (mc) -tasis kartotinis taškas, t.y. $\frac{m}{n} = \frac{cm}{cn}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Išvada. Bet kurios dvi trupmenos išreiškiamos trupmenų simboliais, kurių vardikliai yra lygūs. Pavyzdžiui, jei $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ yra du trupmenų simboliai, tai kiekvienas iš jų ekvivalentus, atitinkamai, trupmenų simboliams $\frac{lm}{ln}$ ir $\frac{nk}{nl}$.

Trupmenos-skaičiaus ir trupmenos-simbolius skyrimas yra svarbus kalbant apie aritmetines operacijas. Matematikoje aritmetikos operacijos su skaičiais yra funkcijos. Tai reiškia, kad skaičių porai turi būti priskiriamas vienintelis aibės elementas. Ši savybė nėra išpildoma, kai aritmetikos operacijos atliekamos su trupmenų simboliais.

Trupmenos apibrėžtis yra paprasčiausioji dalis. Įdomiausia yra parodyti kaip iš šios apibrėžties išvedamos visos trupmenos savybės. Aritmetinės operacijos su trupmenomis apibrėžiamos taip, kad jos apibendrintų atitinkamas operacijas su natūraliaisiais skaičiais.

Trupmenų suma. Aritmetinės operacijos su trupmenomis apibrėžiamos ne *ad hoc*, bet apibendrinant natūraliųjų skaičių atitinkamas aritmetines operacijas. Pavyzdžiui, skaičių 1 ir 2 suma $1+2$ išreiškiama dešiniuoju galu atkarpos $[0, 3]$ gaunamos apjungiant vienetinio ilgio atkarpą $[0, 1]$ su iš karto po jo esančia dvigubai ilgesne atkarpa $[1, 3]$:



Tokį natūraliųjų skaičių sumos apibrėžimą galima apibendrinti trupmenoms.

Apibrėžtis. Dviejų trupmenų $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ suma, žymima $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}$, yra dešinysis galas atkarpos, kuri yra atkarpos $[0, \frac{m}{n}]$ ir iš nulio į tašką $\frac{m}{n}$ pastūmtos atkarpos $[0, \frac{k}{l}]$ jungtis.

Apibrėžties iliustracija: suma $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}$ yra dviejų atkarpų jungties dešinysis galas



Turint sumos apibrėžimą, jos išraiška įrodoma naudojant trupmenos apibrėžimą. Dabartiniuose mūsų vadovėliuose ši išraiška pateikiama kaip apibrėžtis ir be motyvacijos.

Teiginys. $\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml+nk}{nl}$.

Įrodymas. Trupmenų simboliai $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ yra ekvivalentūs trupmenų simboliams, atitinkamai, $\frac{lm}{ln}$ ir $\frac{nk}{nl}$. Trupmena $\frac{lm}{ln}$ yra taško $\frac{l}{ln}$ (lm)-tasis kartotinis taškas, o trupmena $\frac{nk}{nl}$ yra taško $\frac{l}{nl}$ (nk)-tasis kartotinis taškas. Pagal sumos apibrėžimą, pakanka rasti atkarpų $[0, \frac{lm}{ln}]$ ir $[\frac{lm}{ln}, \frac{lm}{ln} + \frac{nk}{nl}]$ jungties dešinįjį galą. Abi atkarpos yra padalintos vienodo ilgio atkarpomis, kurios kongruentiškos atkarpai $[0, \frac{l}{ln}]$. Suskaičiuavę kartotinius taškus gauname, kad ieškomas dešinysis galas yra taško $\frac{l}{ln}$ ($ml+nk$)-kartotinis taškas. Todėl

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{lm}{ln} + \frac{nk}{nl} = \frac{ml+nk}{nl},$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Trupmenų daugyba. Istoriskai natūraliųjų skaičių daugyba kaip aritmetinė operacija atsirado tik *Descarteso* (1596-1650) dėka. Iki tol dviejų natūraliųjų skaičių sandauga buvo atitinkamo stačiakampio plotas. Toliau aprašomas trupmenų sandaugos apibrėžimas yra istoriskai motyvuotas, bet ne vienintelis.

Jei a ir b yra trupmenos ir p yra geometrinė plokštuma su koordinacių sistema, tai *stačiakampis su kraštinėmis a ir b* yra plokštumos p geometrinė vieta taškų (x,y) , kur $x \in [0,a]$ ir $y \in [0,b]$.

Apibrėžtis. Dviejų trupmenų $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ sandauga, žymima $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l}$, yra plotas stačiakampio, kurio kraštinės yra $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$.

Stačiakampio ploto skaičiavimui pakanka šių pagrindinių faktų apie plokštumos figūros plotą:

- plokštumos figūros plotas yra skaičius;
- vienetinio kvadrato plotas yra skaičius 1;
- jei dvi plokštumos figūros yra kongruenčios, tai jų plotai yra lygūs;
- jei dvi plokštumos figūros nesikerta arba turi bendrą tik sieną, tai šių figūrų jungties plotas lygus jų plotų sumai.

Svarbiausia skaičiuojant plotą yra tai, kad tapatinamos dvi skaičių tiesės: vienos jų vienetas yra vienetinės atkarpos ilgis, o kitos tiesės vienetas yra plotas vienetinio kvadrato, kurio kraštinė yra pirmosios tiesės vienetinė atkarpa. Jei pavyksta parodyti, kad vienetinis kvadratas padengiamas n kongruenčių stačiakampių, tai vieno tokio stačiakampio plotas yra $\frac{1}{n}$.

Teiginys. $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}$.

Įrodymas. Stačiakampis, kurio kraštinės yra $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$, padengiamas mk kongruenčių stačiakampių kurių kraštinės yra $\frac{1}{n}$ ir $\frac{1}{l}$. Pastarojo stačiakampio plotas yra $\frac{1}{nl}$, nes nl tokių kongruenčių stačiakampių padengia vienetinį kvadratą. Gauname, kad ieškomo stačiakampio plotas yra $\frac{mk}{nl}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Visos trupmenų sumos ir sandaugos savybės įrodomos, o tuo pačiu ir paaiškinamos, naudojantis apibrėžtimis. Panašiu būdu galima apibrėžti ir kitas aritmetines operacijas su trupmenomis.

6. Priedas B. Matematinio ugdymo gairių įgyvendinimo planas

1. Tikslas	Esmingai pagerinti matematikos mokymą, atsižvelgiant į šiuolaikinio pasaulio vystymosi tendencijas			
1.1. Uždaviniai	Priemonės	Numatomi rezultatai	Laikas	Vykdytojai
1.1.1. Dabartinį matematikos mokymo tikslą „pažinti pasaulį“ pakeisti nauju tikslu „pažinti matematiką realaus pasaulio kontekste“, didaktinius mokymo metodus derinant su esminiais moderniosios elementariosios matematikos bruožais.	1.1.1.1. Parengti naujas pradinio, pagrindinio ir vidurinio matematikos ugdymo programas siekiant realizuoti esminius moderniosios elementariosios matematikos bruožus. 1.1.1.2. Parengti matematikos programos du kursus: standartinį ir sustiprintą (vietoje dabar turimų bendrojo ir išplėstinio kursų). 1.1.1.3. Įvesti dviejų dalių baigiamąjį egzaminą. Pirmoji dalis skirta atsiskaitymui už standartinį kursą ir privaloma visiems. Antroji dalis skirta atsiskaitymui už sustiprintą kursą; sėkmės atveju, galėtų suteikti papildomą balą norintiems studijuoti universitete.	Matematikos turinio aiškinimų paprastumas ir supratimas, matematinio mąstymo galių ugdymas, motyvacijos mokytis matematikos išsaugojimas.		ŠMM, UPC, NEC
1.1.2. Vykdyti nuolatinį mokinių matematikos	1.1.2.1. Parengti nuolatinio moksleivių matematikos pasiekimų bei jų pažangos	Žinios apie esamą matematikos mokymo efektyvumą.		ŠMM, UPC,

<p>pasiekimų vertinimą bei rezultatų analizavimą.</p>	<p>vertinimo sistemą. 1.1.2.2. Parengti moksleivių matematikos pasiekimų analizavimo metodikas.</p>	<p>Nacionaliniu mastu sukurta nuosekli matematikos pasiekimų vertinimo sistema ir vertinimo instrumentai.</p>		<p>NEC</p>
<p>1.1.3. Stiprinti mokytojų profesinę kvalifikaciją ir motyvaciją.</p>	<p>1.1.3.1. Sukurti mokymosi visą gyvenimą programas matematikos mokytojams, sukuriant seminarų, paskaitų, mokyklų tinklą veikiančią po darbo, savaitgaliais ir vasarą. Programos vykdymas turėtų remtis regioniniu principu: renginiai numatomi visoje Lietuvoje.</p> <p>1.1.3.3. Sukurti mokymosi visą gyvenimą materialinio skatinimo sistemą, tam naudojant atlyginimo koeficientus, pareigybes ir kita.</p> <p>1.1.3.4. Dalyvaujantiems mokymosi visą gyvenimą programoje įsteigti įvairių laipsnių diplomus.</p> <p>1.1.3.5. Sukurti matematikos mokymo kokybės grįžtamojo ryšio sistemą. Pvz., numatyti mokytojų apklausas, siekiant išsiaiškinti matematikos mokymo kokybę.</p>	<p>Mokytojai įgis profesinių kompetencijų ugdyti aukštesnius mokinių gebėjimus, savarankišką ir kūrybinį mąstymą.</p>		<p>ŠMM, UPC, LMA, LMD, universitetai</p>

<p>1.1.4. Esmingai atnaujinti universitetines pirmosios ir antrosios pakopų matematikos mokytojų rengimo programas</p>	<p>1.1.4.1. Parengti matematikos mokytojų rengimo aprašą.</p> <p>1.1.4.2. Matematikos mokytojų rengimui skirtas studijų programos suderinti su Matematikos krypties aprašu bei pedagogų rengimo reglamentu.</p> <p>1.1.4.3. Papildyti studijų programos mokyklinės matematikos turinio, šiuolaikinės matematikos istorijos ir filosofijos studijomis.</p>	<p>Būsiami matematikos mokytojai paruošiami moksleivių supažindinimui su matematika.</p>		<p>ŠMM. universitetai</p>
<p>1.1.5. Pertvarkyti matematikos mokymosi bei mokymo priemonės, siekiant atitikimo naujiems mokymo tikslams ir metodams.</p>	<p>1.1.5.1. Atnaujinti matematikos vadovėlių vertinimo (recenzavimo) tvarką.</p> <p>1.1.5.2. Rašyti ir versti matematikos supratimą gilinančias knygas skirtas mokytojams.</p> <p>1.1.5.3. Rengti naujus matematikos užduočių komplektus, orientuotus į aukštesnius ugdymo standartus ir šiuolaikiniame kontekste.</p>	<p>Vadovėliai atitiks samprotavimų loginio tikslumo reikalavimams.</p> <p>Mokyklos turės galimybę pasirinkti ir įsigyti kokybiškus vadovėlius ir kitas mokymo priemones.</p>		<p>ŠMM, universitetai</p>
<p>1.1.6. Sudaryti sąlygas mokykloms lanksčiai</p>	<p>1.1.6.1. Steigti sustiprinto matematikos mokymo klases ten, kur yra tam sąlygos</p>	<p>Mokykloms bus sudarytos galimybės pasinaudoti įvairiais</p>		<p>ŠMM, UPC</p>

<p>organizuoti matematinio ugdymo procesą.</p>	<p>(kvalifikuoti mokytojai ir pan.).</p> <p>1.1.6.2. Koreguoti ugdymo procesą reglamentuojančius dokumentus, numatant lanksčias matematinio ugdymo galimybes (pamokų skaičius, laikas, metodai, aplinkos).</p> <p>1.1.6.3. Padidinti minimalų matematikos pamokų skaičių.</p>	<p>ugdymo organizavimo būdais ir formomis.</p>		
<p>1.1.7. Didinti matematikų bendruomenės vaidmenį gerinant matematikos ugdymą.</p>	<p>1.1.7.1. Valstybinių mokslo ir studijų institucijų bazinio finansavimo lėšų dalį skirti institucijai už jos dalyvavimą vykdant ŠMM užsakomąją veiklą gerinant švietimo procesą.</p> <p>1.1.7.2. Papildyti Lietuvos mokslo tarybos nustatytuose minimaliuose kvalifikaciniuose fizinių, biomedicinos ir technologijos mokslų srityse dirbančių mokslo darbuotojų pareigybių reikalavimus mokslininkams ir dėstytojams dalyvauti ugdymoje, šviečiamoje ir mokslo sklaidos veikloje (tai yra dabartinis reikalavimų aprašo 3.3 punktas, numatytas tik humanitarinių ir socialinių mokslų atstovams).</p> <p>1.1.7.3. Institucinio vertinimo nuostatuose numatyti priemones skatinančias matematikų</p>	<p>Atsiranda mokslininkų motyvacija dalyvauti švietimo gerinimo procese. Užtikrinamas mokslininkų įsitraukimas į švietimo procesą, numatytas Valstybinėje švietimo 2013-2022 metų strategijoje tarp I prioritutinės krypties sudedamųjų dalių.</p>		<p>ŠMM</p>

	bendruomenę įsitraukti į mokymosi visą gyvenimą programų skirtų matematikos mokytojams rengimą bei vykdymą.			
1.1.8. Vykdyti matematikos edukologinius tyrimus.	1.1.8.1. Mokslo sričių, krypčių ir šakų klasifikacijoje tarp fizinių mokslų srities, matematikos krypties (01P) šakų įterpti naują šaką: „modernioji elementarioji matematika ir matematikos didaktika“ (nuo 1995 m. tokia šaka yra Latvijos mokslo klasifikatoriuje).	Remiantis tyrimų rezultatais numatoma ilgalaikė matematinio ugdymo politika.		ŠMM, LMA, LMD, universitetai
2. Tikslas	Propaguoti matematinio raštingumo svarbą			
2.1. Uždaviniai	Priemonės	Numatomi rezultatai	Laikas	Vykdytojai
2.1.1. Įgyvendinti matematinį ugdymą palaikančią kompleksinę viešąją informacinę politiką.	2.1.1.1. Inicijuoti tikslines radijo ir televizijos laidos, straipsnius žiniasklaidoje, bendravimą per medijas. 2.1.1.2. Sudaryti galimybes akademinėi bendruomenei prisidėti kuriant gyvą, pozityvų mokinių santykį su matematika. 2.1.1.3. Plėtoti pozityvų visuomenės santykį su matematika iki minimumo sumažinant negatyvų visuomenės požiūrį į matematiką. 2.1.1.4. Sukurti interneto svetainę arba internetinį leidinį skirtą matematinio	Atsiras atnaujintų ir naujų laidų, patrauklios informacijos viešojoje erdvėje. Didės visuomenės matematinis raštingumas bei sąmoningumas.		ŠMM, LMA, LMD, universitetai

	raštingumo sklaidai visuomenėje.			
2.1.3. Didinti akademinės bendruomenės vaidmenį stiprinant matematinio raštingumo plėtrą.	2.1.3.1. Inicijuoti viešas diskusijas matematikos ugdymo kokybės klausimais. 2.1.3.2. Skatinti akademinės bendruomenės narius viešojoje erdvėje dalintis informacija apie matematiką ir jos taikymus, apie matematikus, studentus ir jaunos moksleivius besidominčius matematika.	Didės matematikų bendruomenės motyvacija dalyvauti švietimo tobulinimo veikloje		ŠMM, LMA, LMD, universitetai

Sutrumpinimai:

ŠMM – Švietimo ir mokslo ministerija

UPC – Ugdymo plėtotės centras

NEC – Nacionalinis egzaminų centras

LMA – Lietuvos mokslų akademija

LMD – Lietuvos matematikų draugija

7. Cituojama literatūra

[**Ainley**] J. Ainley. *Developing purposeful mathematical thinking: a curious tale of apple trees*. PNA, 6(3), 85-103. Adresas internete: <http://www.pna.es/Numeros2/pdf/AinleyDeveloping2012.pdf>

[**Andžāns**] A. Andžāns, L. Ramāna. *How to make the family happy*. In: Proc. 11th International Congress on Mathematics Education, DG12:Rethinking doctoral programs in mathematics education, Rīga, LU, 2008. - pp.14-19. Adresas internete: <http://dg.icme11.org/document/get/113>

[**Apynis**] A. Apynis, E. Mazėtis. *Matematinio ugdymo vidurinėse mokyklose ir gimnazijose problemos*. Lietuvos matematikos rinkinys, LMD darbai, 2011, 52 tomas, 67-71.

[**Būdienė**] V. Būdienė. *Lietuvos moksleivių paprastosios trupmenos sąvokos supratimo tyrimas*. Acta Pedagogica Vilnensia, 2005, 14, 113-124.

[**Daškevičiūtė**] D. Daškevičiūtė. *Matematika – jau ne lietuviams? Abiturientai renkasi lengvesnį kelią*. Savaitraštis „15min“, 2013 m. kovo 18 d., <http://www.15min.lt/naujiena/studentuzona/abiturientai/matematika-jau-ne-lietuviams-246-316151>

[**Česnauskienė**] D. Česnauskienė. *Puikiai mokantys matematikos į Pedagoginį nestoja*. Komentaras. Vakarų Ekspresas, 2012 m. gegužės 3 d., Nr. 102, 7 pusl.

[**Gudavičė**] E. Gudavičė. *Matematikai reikia gabumų, noro mokytis ir gero mokytojo*. Vakarų Ekspresas, 2012 m. gegužės 3 d., Nr. 102, 6,7 pusl.

[**Gudelytė**] L. Gudelytė, A. Krylovas, T. Laukevičius. *Studentų motyvacijos mokytis matematikos ir dėstytojų vertinimo metodikų tyrimas*. Lietuvos matematikos rinkinys, LMD darbai, 2011, 52 tomas, 78-82.

[**Jerrim**] J. Jerrim, A. Choi. *The mathematics skills of school children: How does England compare to the high performing East Asian jurisdictions?* Institute of Education University of London, working paper No 13-03, February 2013.

[**Kilpatrick**] J. Kilpatrick. *Five lessons from the new math era*. Symposium “Reflecting on Sputnik”, 1997. Adresas internete: <http://www.nas.edu/sputnik/kilpatin.htm>

[**Krantz**] S.G. Krantz. *A Mathematician Comes of Age*. The Mathematical Association of America, USA, 2011.

[**Liutkevičienė**] I. Liutkevičienė. *A. Smetona: neleisti rašybos lenkų kalba yra politika ir nieko daugiau*. Naujienų portalas DELFI, 2012 gegužės 31 d. Adresas internete: <http://www.delfi.lt/news/daily/lithuania/asmetona-neleisti-rasybos-lenku-kalba-yra-politika-ir-nieko-daugiau.d?id=58827349>

[**Mathematics1**] *Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century*. The National Academies, 2012. http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=13373

[**Mathematics2**] L. Kounine, J. Marks, E. Truss. *The value of mathematics*. The report of think tank REFORM, June, 2008, London, UK. Adresas internete: http://www.reform.co.uk/content/4504/research/education/the_value_of_mathematics

[**NEC**] 2011 metų IV ir VIII klasių mokinių pasiekimų testai, vertinimai ir rezultatai. Adresas internete: <http://www.egzaminai.lt/222/>

[**programa1**] *Pagrindinio ugdymo bendrosios programos: matematika*. Adresas internete: http://portalas.emokykla.lt/bup/Documents/Vidurinis%20ugdymas/Matematika_3_priedas.pdf

[**programa2**] *Vidurinio ugdymo bendrosios programos: matematika*. Adresas internete: <http://portalas.emokykla.lt/bup/Documents/Pradinis%20ir%20pagrindinis%20ugdymas/Matematika.pdf>

[**programa3**] *Matematikos brandos egzamino programa*. LR ŠMM 2011 m. liepos 1 d. Adresas internete: <http://www.smm.lt/ugdymas/bendrasis/docs/bep/Matematikos%20BE%20programa.pdf>

[**Siegler**] R.S. Siegler et al. Early Predictors of High Schools Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 2012, June 14, published online. Adresas internete: <http://www.psy.cmu.edu/~siegler/Siegler-et-al-inpressPsySci.pdf>

[**Strategija**] Valstybinė švietimo strategija 2013-2022 m.: tikslai, problemos, tobulinimo kryptys. 2012 m. spalio Nr. 17 (81). Adresas internete: http://www.smm.lt/svietimo_bukle/docs/analizes/2012-10_Nr.17_Valstybine_svietimo%20strategija.pdf

[**Wolf**] A. Wolf. *Does education matter?: Myths About Education and Economic Growth*. Penguin, 2002

[**Wu**] H-H. Wu. *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. American Mathematical Society, 2011, p. 551.

[**Ziegler**] G.M. Ziegler. *Mathematics School Education Provides Answers – To Which Questions?* European Mathematical Society Newsletter 2012, June, 8-11.